Funzioni
2.3 – Funzioni

Docenti: Alessandro Andretta e Luca Motto Ros

Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Funzioni

Definizione

Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice **funzione da A in B** se

1. per ogni $a \in A$ c'è un $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ (ovvero $\mathrm{dom}(f) = A$), e
2. se $(a, b_1) \in f$ e $(a, b_2) \in f$, allora $b_1 = b_2$.

In questo caso scriveremo $f \colon A \to B$ e l'unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ si indica con $f(a)$.

Se $f \colon A \to B$ è una funzione

- $A = \mathrm{dom}(f)$ si dice **dominio** della funzione f;
- B si dice **codominio** (da non confondersi con il *range* di f).

Immagine

Sia $f \colon A \to B$ una funzione.

- L'elemento $f(a)$ si dice **valore** di f su a, oppure **immagine** di a mediante f.
- L'insieme

$$\begin{aligned}\operatorname{rng}(f) &= \{f(a) \mid a \in A\}\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in A (f(a) = b)\}\end{aligned}$$

  è il **range** o **immagine** della funzione f.
- Dato $C \subseteq A$, l'insieme

$$\begin{aligned}f[C] &= \{f(a) \mid a \in C\}\\ &= \{b \in B \mid \exists a \in C (f(a) = b)\}\end{aligned}$$

  si dice **immagine** di C. In particolare, $f[A] = \operatorname{rng}(f)$.

Preimmagine

Sia $f\colon A \to B$ una funzione.

- La **preimmagine** o **controimmagine** di un elemento $b \in B$ è l'insieme

$$f^{-1}[\{b\}] = \{a \in A \mid f(a) = b\}\,.$$

  Con un leggero abuso di notazione, scriveremo spesso $f^{-1}(b)$ invece di $f^{-1}[\{b\}]$.

- Più in generale, se $D \subseteq B$ l'insieme

$$\begin{aligned} f^{-1}[D] &= \{a \in A \mid f(a) \in D\} \\ &= \bigcup_{b \in D} f^{-1}(b) \end{aligned}$$

  è la **preimmagine** o **controimmagine** di D.

Come si definisce una funzione?

Una funzione $f\colon A \to B$ può essere descritta in vari modi:

- fornendo un elenco di tutte le coppie $(a, b) \in A \times B$ tali che $(a, b) \in f$, ovvero tali che $b = f(a)$;

Esempio

Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$. Allora la lista

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ f(b) &= 1 \\ f(c) &= 0 \end{aligned}$$

descrive in maniera univoca una funzione $f\colon A \to B$.

- fornendo una "regola" che permette di determinare i valori di f su ciascun $a \in A$;

Esempio

Sia $A = B = \mathbb{R}$. Allora la scrittura

$$f(x) = x^2 + 3$$

descrive in maniera univoca una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero la funzione che manda un generico numero reale $r \in \mathbb{R}$ nel numero reale $r^2 + 3$.

- un mix delle due.

Esempio

Sia $A = B = \mathbb{R}$. Allora la scrittura

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \pi & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

descrive in maniera univoca una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fornendo in alcuni casi il valore esplicito della funzione e in altri casi una "regola" per calcolarne il valore.

Spesso useremo la notazione

$$f\colon A \to B, \qquad a \mapsto f(a)$$

per dire che f è una funzione da A in B che manda un generico elemento $a \in A$ nel valore corrispondente $f(a) \in B$.

Esempio

La scrittura

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2n$$

indica che f è la funzione da $\mathbb{N}$ in se stesso che manda ogni numero naturale nel suo doppio.

Restrizione

Data una funzione $f\colon A \to B$ e un insieme $C \subseteq A$, la funzione

$$f \restriction C \colon C \to B \ , \qquad c \mapsto f(c)$$

si dice **restrizione** di f a C.

Si osservi che

$$\mathrm{dom}(f \restriction C) = C \qquad \text{e} \qquad \mathrm{rng}(f \restriction C) = f[C].$$

Composizione di funzioni

Date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, la **composizione di f e g** è la funzione

$$g \circ f\colon A \to C, \qquad a \mapsto g(f(a)).$$

Ad esempio, siano

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$

e

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x + 3.$$

Allora $g \circ f$ è anch'essa una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per calcolarne i valori si procede come segue:

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2^2) = g(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11.$$

Più in generale, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 3.$$

Operazioni

Definizione

Le funzioni della forma $f\colon A^n \to A$ vengono a volte dette **operazioni** n-**arie** su A.

Esempio

La somma $+$ tra numeri interi è una funzione $+\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, ovvero un'operazione binaria su $\mathbb{N}$. Lo stesso vale per il prodotto, o quando si considerano queste operazioni su altri insiemi numerici.

Se $*\colon A \times A \to A$ è un'operazione binaria su A spesso scriveremo $a * b$ invece di $*(a, b)$ (ad esempio, $a + b$ al posto di $+(a, b)$).

Attenzione!

La differenza non è un'operazione binaria su $\mathbb{N}$, in quanto non è definita per tutti le coppie in $\mathbb{N}^2$. È invece un'operazione binaria su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

Iniezioni, suriezioni, biezioni

Definizione

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice

- **iniettiva** se da $a_1 \neq a_2$ segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$, o, equivalentemente, se da $f(a_1) = f(a_2)$ segue che $a_1 = a_2$;
- **suriettiva** se ogni $b \in B$ è della forma $f(a)$ per qualche $a \in A$ (equivalentemente, $\operatorname{rng}(f) = B$);
- **biettiva** se è iniettiva e suriettiva.

Per brevità diremo che f è una

- **iniezione** se è una funzione iniettiva;
- **suriezione** se è una funzione suriettiva;
- **biezione** se è una funzione biettiva.

Osservazioni

1. Se $f\colon A \to A$ con A *finito* si ha che f è una biezione se e solo se f è una iniezione se e solo se f è una suriezione. Lo stesso vale per le funzioni $f\colon A \to B$ in cui A e B sono insiemi finiti con lo stesso numero di elementi.
2. Se $f\colon A \to B$ è iniettiva allora $f\colon A \to \operatorname{rng}(f)$ (ovvero la stessa f, ma vista come funzione da A nella sua immagine) è una biezione.
3. Date $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, si ha che se sia f che g sono iniettive anche $g \circ f$ lo è, e se f e g sono entrambe suriezioni anche $g \circ f$ lo è. In particolare, la composizione di due biezioni è una biezione.
4. Sia $f\colon A \to B$ una funzione. Allora f è un'iniezione se e solo se $f^{-1}(b)$ *contiene al più un elemento per ogni* $b \in B$, ed è una suriezione se e solo se $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ *per ogni* $b \in B$.

Funzione inversa

Poiché una funzione $f\colon A \to B$ è, per definizione, una relazione $f \subseteq A \times B$, possiamo formare la sua relazione inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$, dove $(b,a) \in f^{-1}$ se e solo se $(a,b) \in f$, ovvero se e solo se $f(a) = b$. Tuttavia non è detto che f^{-1} sia anch'essa una funzione da B in A:

- se f *non è iniettiva*, allora ci sono $a, a' \in A$ distinti tali che $f(a) = f(a') = b$ per qualche $b \in B$: quindi sia (b,a) che (b,a') appartengono a f^{-1}, perciò f^{-1} *non è una funzione* (ci sarebbero almeno due valori di f^{-1} su b);
- se f *non è suriettiva*, allora esiste $b \in B \setminus \operatorname{rng}(f)$: quindi non esiste alcun $a \in A$ tale che $(b,a) \in f^{-1}$, ovvero f^{-1} non può essere una funzione *con dominio* B.

Dunque una funzione $f\colon A \to B$ si può **invertire** (ovvero è tale che la sua relazione inversa f^{-1} è ancora una funzione) solo se è iniettiva e anche in questo caso il dominio di f^{-1} è $\operatorname{rng}(f)$ e non necessariamente tutto B.

Definizione

Se $f\colon A \to B$ è una funzione *iniettiva*, allora la sua **inversa** è la funzione

$$f^{-1}\colon \operatorname{rng}(f) \to A$$

che manda ciascun $b \in \operatorname{rng}(f)$ nell'unico elemento in $f^{-1}(b)$.

Si osservi f^{-1} è sempre iniettiva (poiché f era una funzione) e suriettiva (poiché $\operatorname{dom}(f) = A$), ovvero f^{-1} è una biezione tra $\operatorname{rng}(f)$ e A.

Osservazione

Quando f è anche *suriettiva* (ovvero una *biezione*) si ha che $\operatorname{rng}(f) = B$: quindi in questo caso $\operatorname{dom}(f^{-1}) = B$. Perciò l'inversa di una biezione $f\colon A \to B$ è a sua volta una biezione $f^{-1}\colon B \to A$.

Osservazione 1

Tecnicamente, quando $f\colon A \to B$ è una funzione iniettiva e $b \in \operatorname{rng}(f)$ la notazione $f^{-1}(b)$ è lievemente ambigua. Può infatti indicare

- la **preimmagine** dell'elemento b mediante f, ovvero l'*insieme* $\{a\} = f^{-1}[\{b\}] \subseteq A$ con $a \in A$ unico tale che $f(a) = b$ (l'unicità di a deriva dal fatto che f è iniettiva): in accordo con la notazione introdotta in precedenza, infatti, la preimmagine $f^{-1}[\{b\}]$ di b si denota anche con $f^{-1}(b)$;
- l'**immagine** di b mediante la funzione inversa f^{-1}, ovvero l'*elemento* $a \in A$ tale che $f^{-1}(b) = a$: per definizione, a è l'unico elemento tale che $f(a) = b$.

Sarà il contesto a chiarire quale dei due significati dare a tale espressione.

Prodotto di funzioni

Proposizione

*Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ sono entrambe iniezioni (suriezioni, biezioni) allora lo è anche la **funzione prodotto***

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W, \qquad (x, z) \mapsto (f(x), g(z)) \; .$$

Dimostrazione.

Sia h la funzione prodotto $f \times g$, cosicché $h(x, z) = (f(x), g(z))$.

Caso delle iniezioni: Fissiamo $(x, z), (x', z') \in X \times Z$. Se $h(x, z) = h(x', z')$, allora $(f(x), g(z)) = (f(x'), g(z'))$, da cui $f(x) = f(x')$ e $g(z) = g(z')$. Poiché f e g sono entrambe iniettive, si ha $x = x'$ e $z = z'$, perciò $(x, z) = (x', z')$.

Caso delle suriezioni: Consideriamo un generico $(y, w) \in Y \times W$. Poiché f e g sono suriezioni, esistono $x \in X$ e $z \in Z$ tali che $f(x) = y$ e $g(z) = w$. Allora $h(x, z) = (y, w)$. $\square$

Alcuni esempi ed esercizi

Esempio

L'operazione di somma tra numeri naturali è una funzione binaria

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n, m) \mapsto n + m.$$

È una funzione suriettiva perché ogni $n \in \mathbb{N}$ è immagine, ad esempio, della coppia $(n, 0)$, ma non è iniettiva (quindi neanche biettiva) perché, ad esempio, $(1, 1) \neq (0, 2)$ ma $f(1, 1) = 1 + 1 = 0 + 2 = f(0, 2)$.

Esempio

La funzione (unaria)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2n$$

è iniettiva poiché se $2n = 2m$ allora $n = m$, ma non è suriettiva (quindi neanche biettiva) perché i numeri dispari non sono immagine mediante f di alcun numero naturale.

Esempio

La funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$$

non è né iniettiva (ad esempio, $-1 \neq 1$ ma $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$), né suriettiva (i numeri reali negativi non sono immagine mediante f di alcun numero reale: x^2 è sempre ≥ 0).

Esempio

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo la funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ax + b.$$

È una iniezione poiché se $ax + b = ay + b$ allora $x = y$, ed è una suriezione poiché per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha che $y = f(x)$ con $x = \frac{y-b}{a}$. Quindi f è una biezione.

Dimostrare che la funzione "moltiplicazione"

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n,m) \mapsto n \cdot m$$

è suriettiva ma non iniettiva.

La funzione è suriettiva perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(1,n) = 1 \cdot n = n$.

Non è iniettiva perché, ad esempio, $f(3,4) = 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 6 = f(2,6)$.

(Per mostrare che f non è iniettiva si può anche semplicemente osservare che $f(n,0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, oppure che $f(n,m) = f(m,n)$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.)

Dimostrare che la funzione

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto 2^n$$

è iniettiva ma non suriettiva.

L'iniettività è ovvia: se $n \neq m$ allora $2^n \neq 2^m$ (se $n < m$ allora $2^m = 2^n \cdot 2^{m-n} \geq 2^n \cdot 2 > 2^n$).

La funzione f non è suriettiva perché, ad esempio, $3 \notin \operatorname{rng}(f)$.

Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$. Dimostrare che

$$f : \mathbb{P} \to \mathbb{D}, \qquad n \mapsto n + 1$$

è una biezione.

Iniettività: Ovvia, se $f(n) = f(m)$ (ovvero $n + 1 = m + 1$) allora $n = m$.

Suriettività: Se $k \in \mathbb{D}$ allora $k \neq 0$: segue che $n = k - 1 \in \mathbb{P}$ e $f(n) = k$.

Essendo f sia iniettiva che suriettiva, è una biezione.

Siano $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$ e $\mathbb{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari}\}$. Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{P}, \qquad n \mapsto n + 1$$

è iniettiva ma non suriettiva.

Il fatto che la funzione sia iniettiva è ovvio (vedi slide precedente).

La funzione non è invece suriettiva perché

$$\operatorname{rng}(f) = \{n + 1 \mid n \in \mathbb{D}\} = \mathbb{P} \setminus \{0\},$$

perciò $0 \in \mathbb{P}$ ma $0 \notin \operatorname{rng}(f)$.

Dimostrare che

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \qquad (n,m) \mapsto 2^n(2m+1)-1$$

è una biezione.

Fatto. Ogni $k > 0$ si scrive *in maniera unica* come $2^n(2m+1)$. Infatti, se $n \in \mathbb{N}$ è massimo tale che $2^n \mid k$, allora $k = 2^n \cdot l$ con l dispari, per cui $l = 2m+1$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.

- *Iniettività.* Siano $(n,m),(n',m') \in \mathbb{N}^2$ tali che $f(n,m) = f(n',m')$, ovvero $2^n(2m+1)-1 = 2^{n'}(2m'+1)-1$. Allora $k = 2^n(2m+1)$ e $k' = 2^{n'}(2m'+1)$ sono > 0, e $k = k'$ (per l'uguaglianza precedente). Per l'unicità della scrittura osservata nel Fatto precedente, necessariamente $n = n'$ e $m = m'$, ovvero $(n,m) = (n',m')$.
- *Suriettività.* Per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ha che $k = j+1 > 0$. Per il Fatto precedente, ci sono $n,m \in \mathbb{N}$ tali che $k = 2^n(2m+1)$. Segue che

  $$f(n,m) = 2^n(2m+1)-1 = k-1 = (j+1)-1 = j,$$

  perciò $j \in \operatorname{rng}(f)$.

Sia $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ l'insieme di tutte le tuple di numeri naturali (di lunghezza arbitraria). Dimostrare che la funzione

$$f \colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \qquad (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \mapsto (k_0, k_0, k_1, k_1, \dots, k_{n-1}, k_{n-1})$$

è iniettiva ma non suriettiva.

La funzione f manda ogni n-upla $(k_0, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ nell'unica $2n$-upla $(\ell_0, \dots, \ell_{2n-1}) \in \mathbb{N}^{2n}$ tale che per ogni $0 \leq i < n$ si ha $\ell_{2i+1} = \ell_{2i} = k_i$. Quindi se $s = (k_0, \dots, k_{n-1})$ e $s' = (k'_0, \dots, k'_{m-1})$ sono tuple distinte si possono avere due casi:

- $n \neq m$: allora $f(s) \neq f(s')$ poiché $f(s) \in \mathbb{N}^{2n}$ e $f(s') \in \mathbb{N}^{2m}$, e chiaramente $2n \neq 2m$.
- $n = m$ (ovvero s e s' sono entrambe n-uple), ma $k_i \neq k'_i$ per qualche $0 \leq i < n$: allora $f(s) \neq f(s')$ poiché posto $f(s) = (\ell_0, \dots, \ell_{2n-1})$ e $f(s') = (\ell'_0, \dots, \ell'_{2n-1})$ si ha $\ell_{2i} \neq \ell'_{2i}$ e $\ell_{2i+1} \neq \ell'_{2i+1}$.

Questo dimostra che f è iniettiva. Il fatto f non sia suriettiva segue dal fatto che ogni tupla in $\operatorname{rng}(f)$ ha lunghezza pari, perciò si ha ad esempio $(0, 3, 1) \notin \operatorname{rng}(f)$.

Sia X un insieme non vuoto. Per ogni $A \subseteq X$ la **funzione caratteristica** di A è la funzione $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$ definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Sia 2^X l'insieme di tutte le funzioni da X in $\{0,1\}$. In particolare, $\chi_A \in 2^X$ per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$.

Dimostrare che la funzione $F \colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ che manda ogni $A \subseteq X$ nella sua funzione caratteristica $F(A) = \chi_A$ è una biezione.

Iniettività: Dati $A, B \in \mathcal{P}(X)$ distinti, o esiste $x \in A \setminus B$ oppure esiste $x \in B \setminus A$. Nel primo caso si avrà $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$, nel secondo caso $\chi_A(x) = 0$ e $\chi_B(x) = 1$. In ogni caso $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$, per cui $\chi_A \neq \chi_B$, cioè $F(A) \neq F(B)$. *Suriettività:* Data $f \colon X \to \{0,1\}$ sia

$A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Allora per definizione di funzione caratteristica si ha $\chi_A = f$, ovvero $F(A) = f$.

Abbiamo visto che dato un qualunque insieme non vuoto X, c'è una biezione tra $\mathcal{P}(X)$ e l'insieme 2^X di tutte le funzioni da X in $\{0, 1\}$.

Se X è finito e ha $n \in \mathbb{N}$ elementi, allora ci sono esattamente 2^n elementi in 2^X. Quindi

> *se X è un insieme non vuoto finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.*

In particolare, si ha che X ha meno elementi di $\mathcal{P}(X)$: questo fatto verrà generalizzato ad insiemi X infiniti quando parleremo di cardinalità (Sezione 2.4).

Data una funzione $f\colon X \to Y$, sia $R_f \subseteq X \times X$ la relazione definita da

$$x_1 \; R_f \; x_2 \text{ se e solo se } f(x_1) = f(x_2).$$

- Che tipo di relazione è R_f? (Ordine? Equivalenza?)
  È una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza.

- Se ogni classe di equivalenza rispetto ad R_f contiene un unico elemento, che tipo di funzione è f? (Iniettiva? Suriettiva? Biettiva?)
  Iniettiva (ma non necessariamente suriettiva).

- Se $X = Y = \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$, come sono fatte le classi di equivalenza di R_f?
  Sono del tipo $[r]_{R_f} = \{r, -r\}$ per $r \geq 0$ (si osservi che R_f è la relazione di equivalenza della slide 18 del file sulle relazioni).

Data una funzione $f\colon X \to Y$, sia $R_f \subseteq X \times X$ la relazione definita da

$$x_1 \; R_f \; x_2 \text{ se e solo se } f(x_1) = f(x_2).$$

- Fissiamo $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Sia $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$ e definiamo $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ponendo

  $$f(z) = \text{il resto della divisione intera per } n \text{ di } z.$$

  Che relazione R_f otteniamo?

  Si ha che $f(z) = f(z')$ se e solo se $z \equiv z' (\mathrm{mod} n)$. Quindi R_f è la relazione di congruenza modulo n.

- Sia $X = \mathbb{N}$. Trovare un opportuno insieme Y e una funzione $f\colon X \to Y$ tale che la relazione risultante R_f sia la relazione considerata nella slide 20 del file sulle relazioni.

  Basta porre $Y = \mathbb{N}$ e definire $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

  $$f(n) = \text{il numero di cifre di } n \text{ (in notazione decimale).}$$

Più in generale, si può dimostrare che *ogni* relazione d'equivalenza E su un insieme A è della forma R_f per un'opportuna scelta di $f\colon X \to Y$.

Basta infatti prendere $X = A$, $Y = A/E$ e

$$f\colon X \to Y, \qquad a \mapsto [a]_E$$

e ricordare che dati $a, b \in A$ si ha che

$$a \; E \; b \text{ se e solo se } [a]_E = [b]_E.$$

Stringhe (o sequenze) finite

Una **stringa finita (su A)** è una sequenza finita di simboli provenienti da un dato insieme non vuoto A, che in questo caso viene detto **alfabeto**. L'insieme di tutte le stringhe finite su A si indica con A^*.

Esempio

Sia A l'insieme di tutti i caratteri presenti su una normale tastiera di computer. Allora i seguenti sono esempi di stringhe su A:

$$abcaaa \qquad 102035 \qquad a1BnWms()*8x$$

Altri esempi di stringhe su A sono ad esempio le password che inseriamo per accedere ad un account, il codice PIN della Sim di un cellulare, le parole italiane (scritte) e così via.

Attenzione! A differenza di ciò che accade con gli insiemi, in una stringa è essenziale tenere conto sia delle (eventuali) ripetizioni che dell'ordine con cui i vari elementi di A compaiono.

La stringa

$$abcaaa$$

sarà anche scritta con una notazione che spesso viene usata in matematica per rappresentare le sequenze, ovvero

$$\langle a, b, c, a, a, a \rangle$$

In alcuni casi, questo cambio di notazione è necessario! Se ad esempio $A = \mathbb{N}$ non è chiaro se la stringa 703 rappresenti:

- una stringa con tre elementi, ovvero i numeri 7, 0 e 3;
- una stringa con due elementi, ovvero i numeri 70 e 3;
- una stringa con un unico elemento, ovvero il numero 703.

Questo accade perché anche i numeri naturali sono a loro volta scritti come stringhe sull'alfabeto $A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq \mathbb{N}$.

Scrivendo invece $\langle 70, 3 \rangle$ non vi è più alcuna ambiguità!

Notazione

I termini **stringa** e **sequenza** saranno per noi sinonimi, ma graficamente adotteremo la convenzione che le stringhe vengono scritte nella forma $abcade$ (quando questo non porta ad ambiguità!), mentre le corrispondenti sequenze vengono scritte nella forma $\langle a, b, c, a, d, e \rangle$.

La **lunghezza** di una stringa s, denotata con $\mathrm{lh}(s)$, è il numero di simboli che vi compaiono. Ad esempio, se A è l'alfabeto italiano formato da 21 lettere, la seguente stringa su A

$$hdilcga$$

ha lunghezza 7.

C'è un'unica stringa/sequenza di lunghezza 0, ovvero quella che non contiene alcun simbolo, detta **stringa** o **sequenza vuota**. Se usiamo la notazione per le sequenze la possiamo indicare con $\langle\rangle$. La notazione per le stringhe non ci dà invece alcun modo per rappresentare la stringa vuota: perciò si è stabilito (specialmente in ambito informatico) di denotarla con ε.

C'è una naturale biezione tra gli elementi di A e le stringhe su A di lunghezza 1, ovvero la funzione che associa a ciascun $a \in A$ la sequenza $\langle a \rangle$. Per questa ragione, l'insieme delle sequenze su A di lunghezza 1 viene identificato con A stesso.

Le stringhe su A di lunghezza 2 sono invece identificabili con le coppie ordinate di elementi di A, ovvero con gli elementi dell'insieme $A^2 = A \times A$.

Le stringhe su A di lunghezza 3 si possono identificare con le triple ordinate di elementi di A, ovvero con gli elementi dell'insieme $A^3 = A \times A \times A$.

Più in generale, le stringhe su A di lunghezza n si possono identificare con le n-uple di elementi di A, ovvero con gli elementi dell'insieme A^n.

Questo giustifica l'uso della notazione seguente.

Notazione

L'insieme delle sequenze su A di lunghezza n si denota con A^n. L'insieme di *tutte* le sequenze finite su A (di qualunque lunghezza) si denota con $A^{<\mathbb{N}}$, ovvero

$$A^{<\mathbb{N}} = \{\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i < k(a_i \in A)\}.$$

Dunque

$$A^* = A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n.$$

Per quanto osservato prima, $A^0 = \{\langle\rangle\} = \{\varepsilon\}$. Inoltre A^1 viene identificato con A stesso.

Esempio

Sia $A = \{0, 1\}$. Utilizzando sia la notazione per le sequenze che quella per le stringhe si ottiene:

$$\begin{aligned} A^1 &= \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} \\ &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\} \\ &= \{00, 01, 10, 11\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\} \\ &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \end{aligned}$$

e così via.

Esercizio

- *Quante sono le stringhe in* $\{0,1\}^4$*? Più in generale, dato un numero naturale* $n \in \mathbb{N}$ *quante sono le stringhe in* $\{0,1\}^n$*?*
- *Se* A *è un insieme finito con* k *elementi e* $n \in \mathbb{N}$*, quante sono le stringhe in* A^n*? E se* A *è infinito?*

Rappresentazione di stringhe come funzioni

Una sequenza finita s su A può anche essere rappresentata come una funzione dall'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(s)\}$ in A. Più precisamente, la sequenza s su A di lunghezza n

$$\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$$

si identifica con la funzione

$$s\colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \to A, \qquad k \mapsto s_k.$$

L'idea è che la funzione $s\colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \to A$ *enumera* i simboli della stringa: $s(0)$ è il primo elemento della stringa, $s(1)$ è il secondo elemento della stringa, e così via.

Attenzione!

I numeri naturali partono da 0 e non da 1. Quindi il "primo elemento" di $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$ è s_0 e NON s_1, il "secondo elemento" è s_1 NON s_2 e così via.

Esempio

Sia $A = \{a, b\}$ e $s \in A^4$ la stringa $aaba$ (che si può scrivere anche $\langle a, a, b, a \rangle$). Allora s si può vedere come la funzione $s\colon \{0, 1, 2, 3\} \to A$ definita da

$$s(0) = a \qquad s(1) = a \qquad s(2) = b \qquad s(3) = a$$

Invece la funzione

$$s\colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < 10\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad k \mapsto 9 - k$$

rappresenta la stringa

$$9876543210$$

Esercizio

- *Trovare le funzioni che rappresentano le seguenti stringhe sull'alfabeto* $A = \{0, 1\}$.

$$010 \qquad 00 \qquad 0010 \qquad 100010100$$

- *Trovare la funzione che rappresenta la sequenza* $\langle 0, 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$.
- *Qual'è la funzione che rappresenta la stringa vuota?*
- *Scrivere come funzioni le seguenti stringhe sul normale alfabeto per la lingua italiana* (21 *lettere).*

casa *pomodoro* *via* *telefono*

Concatenazione

Date due stringhe $s, t \in A^*$, la **concatenazione** di s e t, denotata con

$$st,$$

è la stringa su A di lunghezza $\mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$ ottenuta facendo seguire i simboli elencati in s dai simboli elencati in t.

Esempio

Se s è la stringa $acbbca$ e t è la stringa $bacac$, allora st è la stringa

$$acbbcabacac.$$

Si noti che concatenando una qualunque stringa $s \in A^*$ con la sequenza vuota si ottiene la sequenza s di partenza, ovvero

$$s\varepsilon = \varepsilon s = s.$$

Utilizzando la notazione per le sequenze, se $s = \langle 5, 17, 23 \rangle$ e $t = \langle 0, 73, 162 \rangle$ si ha che

$$st = \langle 5, 17, 23 \rangle \langle 0, 73, 162 \rangle = \langle 5, 17, 23, 0, 73, 162 \rangle.$$

Infine, utilizzando la rappresentazione come funzioni, se

$$s \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(s)\} \to A$$

e

$$t \colon \{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathrm{lh}(t)\} \to A$$

allora st è la sequenza di lunghezza $\mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$ definita ponendo per ogni $k < \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(t)$

$$st(k) = \begin{cases} s(k) & \text{se } k < \mathrm{lh}(s) \\ t(k - \mathrm{lh}(s)) & \text{se } k \geq \mathrm{lh}(s). \end{cases}$$

Stringhe/sequenze infinite

Qualche volta è necessario considerare anche stringhe infinite del tipo

$$0011001010100001000001100001000\ldots$$

Usando la notazione per le sequenze, tali stringhe si possono rappresentare come

$$\langle s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \rangle$$

oppure, in maniera più concisa, come

$$\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

Esempio

La sequenza $\langle 2n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ è la stringa infinita di tutti i numeri pari (in ordine crescente), ovvero

$$\langle 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots, 2n, \ldots \rangle$$

Anche una stringa infinita $s = \langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ su un alfabeto A si può identificare con la sua funzione "enumerante"

$$s \colon \mathbb{N} \to A, \qquad k \mapsto s_k.$$

Questa identificazione ci permette di dare una definizione rigorosa di che cosa è una stringa infinita su un alfabeto A: ad esempio, una stringa infinita binaria è semplicemente una funzione $f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

Definizione

Dato un insieme A, indichiamo con $A^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in A, ovvero

$$A^{\mathbb{N}} = \{ f \mid f \colon \mathbb{N} \to A \} .$$

Dunque $A^{\mathbb{N}}$ può anche essere visto come l'insieme di tutte le stringhe infinite su A.

Le sequenze infinite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ vengono anche chiamate **successioni** e denotate con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio

La stringa

$$010101\ldots$$

che alterna 0 ed 1 senza mai ripeterne due consecutivamente è la funzione $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tale che

$$f(0)=0 \quad f(1)=1 \quad f(2)=0 \quad \ldots \quad f(2k)=0 \quad f(2k+1)=1 \quad \ldots$$

che può essere definita esplicitamente come

$$f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}, \qquad n \mapsto [n]_2 \ .$$

Esempio

La funzione

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto n^2$$

è la successione

$$\langle 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$$

che può anche essere scritta come

$$\langle n^2 \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

Esercizio

- Scrivere la stringa

$$\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots \rangle$$

  sia come funzione $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sia con la notazione per le sequenze infinite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.
- Qual'è la successione definita dalla seguente funzione?

$$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad n \mapsto \tfrac{1}{2} n(n+1)$$

  Scriverne esplicitamente i primi 10 termini.